MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 2
28.10.2019

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) = (2\,x_1 - x_2)^3,$$
ist partiell differenzierbar (da die Koordinatenprojektionen $(x_1, x_2) \longmapsto x_1$ und $(x_1, x_2) \longmapsto x_2$ partiell diffbar sind, ist auch $(x_1, x_2) \longmapsto 2x_1 - x_2$ partiell diffbar und damit auch die 3. Potenz $(x_1, x_2) \longmapsto (2x_1 - x_2)^3$ partiell diffbar) mit
$$\partial_1 f(x_1, x_2) = 3\,(2\,x_1 - x_2)^2 \cdot 2 = 6\,(2\,x_1 - x_2)^2$$
und
$$\partial_2 f(x_1, x_2) = 3\,(2\,x_1 - x_2)^2 \cdot (-1) = -3\,(2\,x_1 - x_2)^2$$
für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

b) Die Funktion
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2,$$
ist partiell differenzierbar (da die Koordinatenprojektionen $(x_1, x_2) \longmapsto x_1$ und $(x_1, x_2) \longmapsto x_2$ partiell diffbar sind, ist auch $(x_1, x_2) \longmapsto \sin x_1$ und $(x_1, x_2) \longmapsto \cos x_2$ partiell diffbar und damit auch das Produkt $(x_1, x_2) \longmapsto \sin x_1 \cdot \cos x_2$ partiell diffbar) mit
$$\partial_1 g(x_1, x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2$$
und
$$\partial_2 g(x_1, x_2) = \sin x_1 \cdot (-\sin x_2) = -\sin x_1 \cdot \sin x_2$$
für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

c) Die Funktion
$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x_1, x_2) = (x_1^2 + 10\,x_1\,x_2 + x_2^2)\,e^{x_1^2 + x_2^2},$$
ist partiell differenzierbar (setzt sich aus Produkt und Summe der partiell diffbaren Koordinatenfunktionen sowie aus Komposition mit der diffbaren e-Funktion zusammen) mit
$$\begin{aligned}\partial_1 h(x_1, x_2) &= (2\,x_1 + 10\,x_2) \cdot e^{x_1^2 + x_2^2} + (x_1^2 + 10\,x_1\,x_2 + x_2^2) \cdot \Big(e^{x_1^2 + x_2^2} \cdot (2\,x_1)\Big) = \\ &= (2\,x_1 + 10\,x_2 + 2\,x_1^3 + 20\,x_1^2\,x_2 + 2\,x_1\,x_2^2)\,e^{x_1^2 + x_2^2}\end{aligned}$$
und
$$\begin{aligned}\partial_2 h(x_1, x_2) &= (10\,x_1 + 2\,x_2) \cdot e^{x_1^2 + x_2^2} + (x_1^2 + 10\,x_1\,x_2 + x_2^2) \cdot \Big(e^{x_1^2 + x_2^2} \cdot (2\,x_2)\Big) = \\ &= (10\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_1^2\,x_2 + 20\,x_1\,x_2^2 + 2\,x_2^3)\,e^{x_1^2 + x_2^2}\end{aligned}$$
für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

d) Die Wurzelfunktion $[0,\infty[\to\mathbb{R}$, $t\longmapsto\sqrt{t}$, ist auf $]0,\infty[$ differenzierbar; damit ist die Funktion

$$k:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad k(x_1,x_2)=x_2\sqrt{x_1^2+x_2^2},$$

zumindest in allen $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ partiell differenzierbar mit

$$\partial_1 k(x_1,x_2)=x_2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\,(2\,x_1)\right)=\frac{x_1\,x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$$

und

$$\partial_2 k(x_1,x_2)=1\cdot\sqrt{x_1^2+x_2^2}+x_2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\,(2\,x_2)\right)=\frac{x_1^2+2\,x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}.$$

Wir untersuchen nun die partielle Diffbarkeit von f im Punkt $a=(a_1,a_2)=(0,0)$.
Die 1. Schnittfunktion durch $(0,0)$

$$g_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g_1(x_1)=k(x_1,0)=0,$$

ist die Nullfunktion, also differenzierbar; insbesondere für $a_1=0$ gilt dann

$$\partial_1 k(0,0)=g_1'(0)=0.$$

Die 2. Schnittfunktion durch $(0,0)$

$$g_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g_2(x_2)=k(0,x_2)=x_2\sqrt{x_2^2}=x_2\,|x_2|,$$

ist wegen

$$\frac{g_2(x_2)-g_2(0)}{x_2-0}=\frac{x_2\,|x_2|}{x_2}=|x_2|\underset{x_2\to 0}{\longrightarrow}0$$

an der Stelle $a_2=0$ differenzierbar und es ist dann

$$\partial_2 k(0,0)=g_2'(0)=0.$$

2. a) Da die Koordinatenprojektionen $(x,y)\longmapsto x$ und $(x,y)\longmapsto y$ stetig, und Quotient, Produkt und Summe stetiger Funktionen wieder stetig sind, ist f in allen Punkten der offenen Menge $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ stetig.

f ist auch stetig in $(0,0)$, denn für $(x,y)\in\mathbb{R}^2,(x,y)\neq(0,0)$, gilt

$$\begin{aligned}0\le|f(x,y)-f(0,0)| &= \left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x^3-y^3|}{x^2+y^2}\\ &\le \frac{|x|^3}{x^2+y^2}+\frac{|y|^3}{x^2+y^2} = |x|\underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\le 1} + |y|\underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\le 1}\\ &\le |x|+|y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0+0=0.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0),$$

und damit ist f stetig in $(0,0)$.

b) Da die Koordinatenprojektionen $(x,y) \longmapsto x$ und $(x,y) \longmapsto y$ partiell differenzierbar, und Quotient, Produkt und Summe partiell differenzierbarer Funktionen wieder partiell differenzierbar sind, ist f in allen Punkten der offenen Menge $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x,y) &= \Big(\frac{3x^2(x^2+y^2)-(x^3-y^3)2x}{(x^2+y^2)^2}\,,\,\frac{-3y^2(x^2+y^2)-(x^3-y^3)2y}{(x^2+y^2)^2}\Big)\\ &= \Big(\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,,\,\frac{-y^4-3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\Big), \quad (x,y)\neq(0,0)\end{aligned}$$

f ist auch partiell differenzierbar in $(0,0)$:
Wir betrachten dazu den Differenzenquotienten der Funktion f im Punkt $(0,0)$ in x–Richtung: Für $x \neq 0$ ist

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{\frac{x^3-0^3}{x^2+0^2}-0}{x} = \frac{x^3}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1,$$

also ist

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 1.$$

Wir betrachten den Differenzenquotienten der Funktion f im Punkt $(0,0)$ in y–Richtung: Für $y \neq 0$ ist

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \frac{\frac{0^3-y^3}{0^2+y^2}-0}{y} = \frac{-y^3}{y^3} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} -1,$$

also ist

$$\partial_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = -1.$$

Damit ist die Funktion f im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar ist mit

$$\operatorname{grad} f(0,0) = (\partial_1 f(0,0),\ \partial_2 f(0,0)) = (1,-1).$$

c) Es gilt $\operatorname{grad} f(0,0) = (1,-1) \neq (0,0)$, also ist $(0,0)$ kein kritischer Punkt von f.
Sei nun $(x,y) \neq (0,0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) &\Longleftrightarrow x^4+3x^2y^2+2xy^3 = 0 \ \wedge\ -y^4-3x^2y^2-2x^3y = 0\\ &\Longrightarrow x^4-y^4+2xy^3-2x^3y = 0\\ &\Longleftrightarrow (x^2-y^2)(x^2+y^2)+2xy(y^2-x^2) = 0\\ &\Longleftrightarrow (x^2-y^2)\big(x^2+y^2-2xy\big) = 0\\ &\Longleftrightarrow (x^2-y^2)(x-y)^2 = 0\\ &\Longleftrightarrow (x-y)(x+y)(x-y)^2 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=y\ \vee\ x=-y.\end{aligned}$$

Damit kommen als kritische Punkte nur die Punkte

$$(x,x) \quad \text{und} \quad (x,-x) \quad \text{mit } x\neq 0$$

in Frage. Nun ist aber für alle $x \neq 0$

$$\operatorname{grad} f(x,x) = \Big(\frac{6x^4}{(2x^2)^2}\,,\,\frac{-6x^4}{(2x^2)^2}\Big) = \Big(\frac{6}{4},-\frac{6}{4}\Big) \neq (0,0),$$

und ebenfalls

$$\operatorname{grad} f(x,-x) = \Big(\frac{2x^4}{(2x^2)^2}\,,\,\frac{-2x^4}{(2x^2)^2}\Big) = \Big(\frac{2}{4},-\frac{2}{4}\Big) \neq (0,0).$$

Also hat f keine kritischen Punkte.

3. Wir betrachten für die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \sin x \cdot \arctan\left(\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

ihren Differenzenquotienten im Punkt $a = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ in x–Richtung

$$\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \frac{\sin x \cdot \arctan\left(\ln \frac{1}{\sqrt{x^2+0^2}}\right)}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \arctan\left(\ln \frac{1}{|x|}\right)$$

für alle $x \neq 0$ und untersuchen, ob sein Grenzwert für $x \to 0$ existiert. Der erste Faktor läßt sich mit der Regel von de l'Hospital behandeln, und es ist

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1;$$

für den zweiten Faktor ergibt sich direkt

$$\lim_{x \to 0} \arctan \underbrace{\left(\ln \underbrace{\frac{1}{|x|}}_{\to \infty}\right)}_{\to \infty} = \frac{\pi}{2},$$

so daß man insgesamt

$$\lim_{x \to 0} \left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\arctan\left(\ln \frac{1}{|x|}\right)}_{\to \frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

erhält. Folglich existiert die partielle Ableitung von f nach der 1. Variablen im Punkt $(0,0)$, und es gilt

$$\partial_1 f(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

4. Die beiden gegebenen Funktionen $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind stetig und auf $]a,b[$ stetig differenzierbar, insbesondere also auf $]a,b[$ differenzierbar, und genügen damit den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung; folglich gibt es Punkte $\xi \in\,]a,b[$ und $\eta \in\,]a,b[$ mit

$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \underset{(*)}{=} 0 \qquad \text{und} \qquad h'(\eta) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} \underset{(*)}{=} 0,$$

wobei in $(*)$ die zusätzliche Voraussetzung $g(a) = g(b)$ und $h(a) = h(b)$ eingeht.

Da g und h auf $]a,b[$ differenzierbar sind, ist die Funktion

$$f :]a,b[\times]a,b[\to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = g(x) \cdot h(y),$$

partiell differenzierbar, und für alle $(x,y) \in\,]a,b[\times]a,b[$ gilt

$$\partial_1 f(x,y) = g'(x) \cdot h(y) \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(x,y) = g(x) \cdot h'(y),$$

so daß $(\xi,\eta) \in\,]a,b[\times]a,b[$ wegen

$$\partial_1 f(\xi,\eta) = \underbrace{g'(\xi)}_{=0} \cdot h(\eta) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_2 f(\xi,\eta) = g(\xi) \cdot \underbrace{h'(\eta)}_{=0} = 0,$$

zusammen also

$$\operatorname{grad} f(\xi,\eta) = \big(\partial_1 f(\xi,\eta),\ \partial_2 f(\xi,\eta)\big) = (0,0),$$

eine Nullstelle von $\operatorname{grad} f$ und damit eine kritische Stelle von f ist.